E.N.S.I. PHYSIQUE-MECANIQUE Option M 1981

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES (4 h)

N.B. — *Les deux premières parties sont des préliminaires intervenant dans la suite du problème.*

Les candidats peuvent admettre le résultat d'une question non résolue pour traiter les questions suivantes.

I

1° Soit α un réel strictement positif. Étant donnés trois réels quelconques a, λ, μ déterminer l'ensemble des fonctions y deux fois continûment dérivables sur R telles que $y(a) = \lambda$, $y'(a) = \mu$ qui vérifient l'équation :

(1) $$y'' - \alpha^2 y = 0$$

2° Soit y une solution de (1). Montrer que s'il existe $x_1, x_2 \in \mathrm{R}$, $x_1 < x_2$, tels que $y(x_1) = y(x_2) = 0$ alors y est identiquement nulle sur R.

3° Soit y une solution de (1). Montrer que s'il existe $x_1 \in \mathrm{R}$ tel que $y(x_1) = 0$, et si $\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0$, alors y est identiquement nulle sur R.

4° Soit a un réel et soit f une fonction continue sur $]a, +\infty[$ telle que $\forall x \in]a, +\infty[$, $f(x) \geqslant 0$.

On se propose d'étendre les résultats des 2e et 3e questions aux fonctions y deux fois continûment dérivables sur $]a, +\infty[$ et vérifiant sur cet intervalle l'équation suivante :

(2) $$y'' - f(x)\, y = 0$$

De telles fonctions seront appelées « solutions de (2) » sur $]a, +\infty[$.

On admettra sans démonstration que si une solution de (2) s'annule en tout point d'un intervalle ouvert non vide contenu dans $]a, +\infty[$ alors elle s'annule en tout point de $]a, +\infty[$.

a. Soit y une solution de (2). Montrer que yy' est croissante au sens large sur $]a, +\infty[$ (c'est-à-dire que si $x_1 < x_2$ alors $y(x_1)\, y'(x_1) \leqslant y(x_2)\, y'(x_2)$).

b. Soit y une solution de (2). On suppose qu'il existe $x_1, x_2 \in]a, +\infty[$, avec $x_1 < x_2$ tels que $y(x_1) = y(x_2) = 0$.

Montrer que $y\, y'$ est identiquement nulle sur $[x_1, x_2]$. En déduire que y est identiquement nulle sur $]a, +\infty[$.

c. On considère maintenant une solution de (2) telle que $\lim_{x \to +\infty} y(x)\, y'(x) = 0$.

Montrer que s'il existe $x_1 > a$ tel que $y(x_1) = 0$ alors y est identiquement nulle sur $]a, +\infty[$.

II

Dans toute la suite on désigne par E l'espace vectoriel des fonctions polynômes sur $[0, +\infty[$ à coefficients réels.

1° Montrer que si $f \in \mathrm{E}$ alors l'intégrale $\int_0^\infty f(x)\, e^{-x}\, dx$ est absolument convergente.

2° Montrer que si $f \in \mathrm{E}$ on a

$$\int_0^\infty f(x)\, e^{-x}\, dx = f(0) + \int_0^\infty f'(x)\, e^{-x}\, dx$$

(on pourra effectuer une intégration par parties sur un intervalle borné $[0, l]$ et procéder ensuite à un passage à la limite convenablement justifié).

3° On pose, pour $n \geqslant 0$ $\quad \mathrm{I}_n = \int_0^\infty x^n\, e^{-x}\, dx$

Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.

4° Montrer que $\mathrm{I}_n = n!$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

.../...

III

On désigne toujours par E l'espace vectoriel des fonctions polynômes sur $[0, \infty[$ à coefficients réels.

Pour $f, g \in E$, on pose :

$$< f, g > = \int_0^{\infty} f(x)\, g(x)\, e^{-x}\, dx.$$

1° Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

2° Pour tout couple (n, k) d'entiers positifs ou nuls on note $f_{n,k}$ la dérivée $k^{ième}$ de $\frac{e^{-x}.x^n}{n!}$ (la dérivée d'ordre zéro d'une fonction étant par convention la fonction elle-même).

Montrer que l'on a :

$$\forall\ x \geqslant 0, \qquad f_{n,k}(x) = e^{-x}\, g_{n,k}(x)$$

où $g_{n,k}$ est une fonction polynôme que l'on calculera.

3° Montrer que $g_{n,k}(0) = 0$ si $k < n$ et que $g_{n,n}(0) = 1$ pour tout $n \geqslant 0$.

4° Montrer que l'on a, pour tout $n \geqslant 0$, pour tout $k \geqslant 1$ et pour tout élément u de E

$$\int_0^{\infty} f_{n,k}(x)\, u(x)\, dx + f_{n,k-1}(0).u(0) + \int_0^{\infty} f_{n,k-1}(x)\, u'(x)\, dx = 0$$

(on pourra procéder de même qu'au II, 2°).

5° Montrer que l'on a, pour tout élément u de E et pour tout $n \geqslant 0$

$$\int_0^{\infty} f_{n,n}(x)\, u(x)\, dx = (-1)^n \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}\, x^n}{n!}\, u^{(n)}(x)\, dx.$$

6° Pour $n \geqslant 0$ on note désormais E_n l'ensemble des éléments de E de degré inférieur ou égal à n.

a. Montrer que $g_{n+1,n+1}$ est orthogonal à E_n pour le produit scalaire introduit au 1°.

b. Montrer que $(g_{0,0}, g_{1,1}, \ldots, g_{n,n})$ est une base orthonormale de E_n pour ce produit scalaire.

7° Soit $(e_n)_{n \geqslant 0}$ une suite d'éléments de E possédant les propriétés suivantes

i. $\forall_{n,m} \geqslant 0, \qquad < e_n, e_m > = \delta_{n,m}$

(où $\delta_{n,m}$ est le symbole de Kronecker égal à 1 si $n = m$ et égal à zéro si $n \neq m$).

ii. $\forall_n \geqslant 0, \qquad d^\circ e_n \leqslant n$

iii. $\forall_n \geqslant 0, \qquad e_n(0) \geqslant 0.$

Montrer que $e_n = g_{n,n}$ pour tout $n \geqslant 0$.

IV

E désigne toujours l'espace vectoriel des fonctions polynômes sur $[0, +\infty[$ à coefficients réels, et E_n l'ensemble des éléments de E de degré inférieur ou égal à n.

On pose, pour $n \geqslant 0, \quad x \geqslant 0$

.../...

$$P_n(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-x)^p . n!}{(n-p)!\,(p!)^2}.$$

On pourra utiliser le fait que P_n est la fonction $g_{n,n}$ introduite au III.

1° Vérifier que P_1, P_2 et P_3 possèdent respectivement une, deux et trois racines strictement positives distinctes.

2° Soit $n \geqslant 1$. Montrer que

$$\int_0^{\infty} P_n(x)\, e^{-x}\, dx = 0.$$

En déduire que P_n possède au moins une racine strictement positive d'ordre de multiplicité impair.

3° Soit $n \geqslant 1$ et soient $x_1, \ldots, x_l$ les racines positives distinctes de P_n d'ordre impair, rangées par ordre croissant. On pose, pour $x \geqslant 0$

$$Q_n(x) = (x - x_1) \ldots (x - x_l).$$

Montrer que $(-1)^n P_n(x) Q_n(x) \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant 0$.

4° Soit $n \geqslant 1$. Montrer que P_n possède n racines strictement positives distinctes (on pourra utiliser le fait que P_n est orthogonal à E_{n-1} pour le produit scalaire défini au III).

V

Soit $n \geqslant 0$ un entier. On note toujours $P_n(x)$ la fonction polynôme introduite au IV.

1° Déterminer l'ensemble Δ_n des réels non nuls vérifiant l'inéquation

$$\frac{2n+1}{x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2} < 0.$$

On note α_n la borne inférieure de $\Delta_n \cap]0, +\infty[$.
Donner un équivalent simple de α_n quand n tend vers l'infini.

2° Montrer que l'on a, pour tout réel x et pour tout entier $n \geqslant 0$

$$x P_n''(x) + (1-x) P_n'(x) + n P_n(x) = 0$$

3° On pose, pour $x \geqslant 0$

$$h_n(x) = e^{\frac{-x}{2}} . \sqrt{x} . P_n(x).$$

Montrer que l'on a, pour tout réel $x > 0$ et pour tout entier $n \geqslant 0$

$$4x^2 h_n''(x) + (1 + (4n+2)x - x^2) h_n(x) = 0$$

4° Pour $n \geqslant 1$ on note x_n la plus grande racine de P_n.

En utilisant les résultats du I montrer qu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n \geqslant 1}$ de réels positifs telle que $\lim_{n \to \infty} \frac{\alpha_n}{4n} = 1$ et telle que $x_n \leqslant \alpha_n$ pour tout $n \geqslant 0$.

XXXXXX

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail